Autour des matrices de Toeplitz

stephane.gonnord@prepas.org

I Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Q 1. Notons, pour $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, $D^{(k)}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $D^{(k)}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Les matrices de Toeplitz sont alors les matrices de la forme

$$t_{-(n-1)}D^{(-(n-1))} + \cdots + t_0 D^{(0)} + \cdots + t_{n-1}D^{(n-1)}$$

avec les t_i décrivant $\mathbb{C}$. Bref : $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est l'espace engendré par les $D^{(k)}$. Comme cette famille est clairement libre (prendre une combinaison linéaire libre ; regarder le coefficient $(1, 1+k)$ si $k \geq 0$ et $(1-k, 1)$ sinon...) elle en constitue une base, et il ne reste plus qu'à compter sur ses petits doigts :

$$\boxed{\text{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ est un sous-espace de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ de dimension } 2n-1.}$$

Q 2. Supposons que A et B commutent. On a alors $A^2B = A.AB = A.BA = AB.A = BA.A = BA^2$ puis par récurrence immédiate, $AB^k = B^kA$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par distributivité, A commute ensuite avec tout polynôme en B.
On peut ensuite retourner l'argument : si $Q \in \mathbb{C}[X]$ alors $Q(B)$ commute avec A d'après ce qui précède, donc avec tout polynôme en A !

$$\boxed{\text{Si } A \text{ et } B \text{ commutent et } P, Q \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(A) \text{ et } P(B) \text{ commutent.}}$$

I.B – Cas de la dimension 2

Q 3. Le calcul est sans finesse :

$$\boxed{\chi_A = (X-a)^2 - bc}$$

Q 4. Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique, c'est-à-dire les λ tels que $(\lambda - a)^2 = bc$.
On évite de sortir les racines de complexes, sauf à vouloir faire rire l'examinateur.

— Si $bc \neq 0$ alors il existe deux complexes dont le carré vaut bc, donc A possède deux valeurs propres donc (dimension) est diagonalisable.

— Si $bc = 0$, alors A possède a comme unique valeur propre. Elle est donc diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_2, donc **égale** à aI_2, ce qui est vrai si et seulement si $b = c = 0$.

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } b \text{ et } c \text{ sont tous les deux non nuls ou tous les deux nuls.}}$$

Q 5. Discutons (bien entendu) sur le nombre de valeurs propres de A. Puisque le corps de base est $\mathbb{C}$ il y en a au moins une, et puisque qu'on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il y en a au plus 2.

— Si A possède deux valeurs propres $\alpha \neq \beta$, alors A est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

— Si A possède une seule valeur propre α, on se contente de trigonaliser A (rappel : c'est possible car on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$), et A est bien semblable à une matrice triangulaire supérieure avec sur la diagonale l'unique valeur propre.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de la forme } \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \text{ (avec } \alpha \neq \beta \text{) ou } \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}$$

Q 6. La question précédente nous invite à ne traiter que les deux matrices de la conclusion précédente (si A et B sont semblables ainsi que B et C, alors A et C sont semblables[1]).

— La deuxième $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est directement une matrice de Toeplitz.

— La première a pour polynôme caractéristique

$$(X-\alpha)(X-\beta) = \cdots = \left(X - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \gamma,$$

avec $\gamma = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \alpha\beta$. Considérons alors $\begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \gamma \\ 1 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$: cette matrice est de Toeplitz et a pour polynôme caractéristique $\left(X - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \gamma = (X-\alpha)(X-\beta)$, donc $(\alpha \neq \beta)$ est diagonalisable, et même semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$; c'est ce qu'on voulait montrer.

$$\boxed{\text{Toute matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ est semblable à une matrice de Toeplitz.}}$$

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Q 7. La relation $AX = \lambda X$ fournit n équations scalaires. La première et la dernière sont respectivement $ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$ et $cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n$; les autres sont, pour $i \in [\![2, n-1]\!]$: $cx_{i-1} + ax_i + bx_{i+1} = \lambda x_i$. En ayant posé $x_0 = x_{n+1} = 0$, les deux équations aux bords s'unifient à l'équation générique, à savoir $(k = i-1)$:

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

Il reste à noter que la famille finie $(x_0, ..., x_{n+1})$ s'étend en une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant la récurrence souhaitée, en posant pour tout $k \geq n$: $x_{k+2} = \frac{1}{b}\left((\lambda - a)x_{k+1} - bx_k\right)$ (on avait bien entendu noté que la condition $bc \neq 0$ impose $b \neq 0$...)

$$\boxed{\text{c.q.f.d.}}$$

Q 8. Il s'agit évidemment de discuter selon le nombre de racines.

— Si (I.1) possède deux racines $r_1 \neq r_2$, alors il existe deux constantes K_1, K_2 telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = K_1 r_1^k + K_2 r_2^k$.

— Si (I.1) possède une racine double r_0, alors il existe deux constantes K_1, K_2 telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = (K_1 + K_2 k) r_0^k$.

$$\boxed{\text{Et on vient de montrer qu'on se souvient du cours de première année.}}$$

Q 9. Supposons par l'absurde que (I.1) possède une unique racine r_0. Avec les notations précédentes, la condition $x_0 = 0$ donne $K_1 = 0$; la condition $x_{n+1} = 0$ fournit alors $K_2 r_0^{n+1} = 0$. On s'inquiète alors de la nullité éventuelle de r_0. Mais 0 n'est pas solution de (I.1) (car $c \neq 0$), donc $r_0 \neq 0$, puis $K_2 = 0$. On a alors tous les x_i nuls, donc X aussi, ce qui n'est pas raisonnable pour un vecteur propre.

$$\boxed{\text{(I.1) possède deux racines distinctes.}}$$

1. On peut aussi plisser les yeux et dire que la relation de similitude est transitive...

Q 10. On a déjà vu que 0 n'est pas racine de (I.1), donc r_1 et r_2 sont non nuls. Ensuite, les conditions $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$ fournissent successivement (avec les notations vues plus haut) : $K_2 = -K_1$, puis $K_1(r_1^{n+1} - r_2^{n+1}) = 0$. Puisque $X \neq 0$, on a $K_1 \neq 0$, donc $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$ puis : $\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^{n+1} = 1$.

$$\boxed{r_1 \text{ et } r_2 \text{ sont non nuls et } \frac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}.}$$

Q 11. Si par malheur on a oublié son cours de terminale/sup/spé/whatever, ça doit pouvoir se retrouver, en partant de la factorisation d'un polynôme (et pas d'un réel, bien entendu...) dont on connaît le coefficient dominant et les racines :

$$bX^2 + (a-\lambda)X + c = b(X-r_1)(X-r_2) = bX^2 - b(r_1+r_2)X + br_1r_2,$$

et en identifiant les coefficients de ces polynômes (et toujours grâce au fait que $b \neq 0$) :

$$\boxed{r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b} \text{ et } r_1r_2 = \frac{c}{b}.}$$

Puisque $\dfrac{r_1}{r_2} \in \mathbb{U}_{n+1}$, il existe $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $r_1 = r_2 \mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)}$; le produit r_1r_2 vaut alors d'une part $r_1^2 \mathrm{e}^{-2i\ell\pi/(n+1)}$ et d'autre part $\dfrac{c}{b}$, donc :

$$r_1^2 = \frac{c}{b}\mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)} = \frac{bc}{b^2}\mathrm{e}^{2i\ell\pi/(n+1)} = \left(\frac{\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}\right)^2,$$

où on a choisi ρ_0 un complexe dont le carré vaut bc (et un tel complexe existe bien). Il existe donc $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $r_1 = \varepsilon \dfrac{\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}$. On a alors :

$$\lambda = a + b(r_1 + r_2) = a + \varepsilon\rho_0 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)} + \mathrm{e}^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)}_{2\cos(\ell\pi/(n+1))},$$

et il reste à poser $\rho = \varepsilon\rho_0$ (dont le carré vaut toujours bc). Remarquons enfin que $r_2 \neq r_1$, donc $\dfrac{r_1}{r_2} \neq 1$ donc $\ell \neq 0$.

$$\boxed{\text{Il existe } \ell \in [\![1, n]\!] \text{ et } \rho \in \mathbb{C} \text{ tels que } \rho^2 = bc \text{ et } \lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)}$$

Q 12. Avec les notations précédentes,

$$x_k = K_1(r_1^k - r_2^k) = K_1\left(\left(\frac{\varepsilon\rho_0}{b}\mathrm{e}^{i\ell\pi/(n+1)}\right)^k - \left(\frac{\varepsilon\rho_0}{b}\mathrm{e}^{-i\ell\pi/(n+1)}\right)^k\right) = K_1\frac{\rho^k}{b^k}\underbrace{\left(\mathrm{e}^{i\ell k\pi/(n+1)} - \mathrm{e}^{-i\ell k\pi/(n+1)}\right)}_{=2i\sin(\ell k\pi/(n+1))}.$$

$$\boxed{\text{Il existe } \alpha \in \mathbb{C} \text{ tel que pour tout } k \in [\![0, n+1]\!],\ x_k = 2i\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right).}$$

Q 13. Il s'agit de faire la synthèse, en fixant ρ de carré bc puis en montrant que pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\dfrac{\ell\pi}{n+1}\right)$ est effectivement valeur propre de A $(= A_n(a, b, c))$.
On fixe donc un tel ℓ, et une géniale intuition nous conduit à définir

$$x_k = 2i\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$$

pour $0 \leq k \leq n+1$, considérer le vecteur $X = (x_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et essayer de montrer que X est vecteur propre pour la valeur propre λ_ℓ. Tout d'abord, X est non nul [2] ; il s'agit alors de vérifier : $AX = \lambda_\ell X$.
Cette équation est équivalente (grâce aux valeurs aux bords) aux n équations $bx_{k+2}+(a-\lambda_\ell)x_{k+1}+cx_k = 0$ $(0 \leq k \leq n-1)$. Mais $x_k = \Big(\underbrace{\frac{\rho e^{i\ell\pi/(n+1)}}{b}}_{t_1}\Big)^k - \Big(\underbrace{\frac{\rho e^{-i\ell\pi/(n+1)}}{b}}_{t_2}\Big)^k$ avec $t_1t_2 = \dfrac{\rho^2}{b^2} = \dfrac{c}{b}$ et $t_1+t_2 = \dfrac{2\rho\cos(\ell\pi/(n+1))}{b} = \dfrac{\lambda_l - a}{b}$, donc $b(X-t_1)(X-t_2) = bX^2 + (a-\lambda_\ell)X + c$, donc t_1 et t_2 sont les racines (oui, elles sont différentes) de (I.1), donc la relation de récurrence souhaitée est bien vérifiée, ce qui achève la synthèse : les λ_ℓ sont toutes valeurs propres de A.
Il reste tout de même à noter que lorsque $\ell \in [\![1, n]\!]$, on a $\dfrac{\ell\pi}{n+1} \in [0, \pi]$, intervalle sur lequel la fonction cos est injective, donc les λ_ℓ sont distincts.

$$\boxed{A(a,b,c) \text{ est diagonalisable avec } n \text{ valeurs propres distinctes : } a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right), \text{ pour } 1 \leq \ell \leq n.}$$

II Matrices circulantes

Q 14. Chaque multiplication par M_n « remonte les diagonales » (ou les décale vers la droite) :

$$\boxed{M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \end{pmatrix}, \ldots\ M_n^n = I_n.}$$

Pour les grincheux, M_n^k est constitué de zéros, sauf en les positions $(i, i+k)$ (pour $1 \leq i \leq n-1-k$) et $(i-k, i)$ (pour $i+1 \leq k \leq n$) où il y a des 1.
La question 30 donnera l'occasion de « prouver » ce genre de choses.
La relation $M_n^n = I_n$ fournit pour le même prix :

$$\boxed{M_n \text{ est inversible (d'inverse } M_n^{n-1} = {}^tM_n) \text{ et } X^n - 1 \text{ est un polynôme annulateur de } M_n.}$$

Q 15. Puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, $X^n - 1$ est scindé à racines simples (les n racines $n$èmes de l'unité) donc :

$$\boxed{M_n \text{ est diagonalisable.}}$$

Ensuite, on peut calculer le polynôme caractéristique de M_n en développant par rapport à la première colonne : $\chi_{M_n} = X^n - 1$ (ce n'est pas très surprenant, sans être évident : une matrice diagonalisable peut avoir des polynômes annulateurs de degré n qui ne sont pas le polynôme caractéristique). Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(M_n) = \mathbb{U}_n = \{1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}\}}$$

2. Je fais le pari que sur beaucoup de copies il aura été question de $x_k = 2i\alpha\dfrac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\dfrac{\ell k\pi}{n+1}\right)$ avec hélas α potentiellement nul...

Pour obtenir des vecteurs propres, on peut résoudre $M_nX = \omega_n^k X$, ou bien regarder la question suivante, et être pris d'une furieuse envie de considérer (pour $0 \leq k \leq n-1$) $X_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_n^k \\ \omega_n^{2k} \\ \vdots \\ \omega_n^{(n-1)k} \end{pmatrix}$: il vérifie $M_nX_k = \omega_n^k X_k$! (Et bien entendu il est non nul).

$$\boxed{(X_k)_{0\leq k\leq n-1} \text{ constitue une base de vecteurs propres de } M_n.}$$

Ben oui c'est une base : n vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes, en dimension n.

Q 16. Bien entendu, Φ_n est la matrice dont les colonnes sont les X_k. Il s'agit donc de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la base de diagonalisation vue plus haut. On a alors directement :

$$\boxed{\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \omega_n & & \\ & & \ddots & \\ (0) & & & \omega_n^{n-1} \end{pmatrix}}$$

Q 17. D'après la valeur de M_n^k :

$$T(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, t_0, t_1, ..., t_{n-1}) = t_0 I_n + t_1 M_n + t_2 M_n^2 + \cdots t_{n-1}M_n^{n-1}$$

$$\boxed{\text{Avec les notations précédentes, il suffit donc de prendre } P = t_0 + t_1X + \cdots + t_{n-1}X^{n-1}}$$

Q 18. Écrivons la division euclidienne de $P \in \mathbb{C}[X]$ par $X^n - 1$: $P = (X^n - 1)Q + R$ avec $R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$P(M_n) = \underbrace{(M_n^n - I_n)}_{=0} Q(M_n) + R(M_n);$$

et on a vu à la question précédente que $R(M_n)$ est une matrice circulante.

$$\boxed{\text{Si } P \in \mathbb{C}[X], \text{ alors } P(M_n) \text{ est une matrice circulante.}}$$

Q 19. En combinant les faits suivants :
- toute matrice circulante est de la forme $P(M_n)$;
- $\lambda P_1(M_n) + P_2(M_n) = (\lambda P_1 + P_2)(M_n)$;
- $P_1(M_n)P_2(M_n) = (P_1P_2)(M_n)$;
- toute matrice de la forme $P(M_n)$ est circulante...

on obtient le fait que l'ensemble des matrices circulantes est stable par combinaison linéaire et produit ; il contient par ailleurs la matrice nulle et est inclus dans $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ par définition.
Enfin, ${}^t(P(M_n)) = P({}^tM_n) = P(M_n^{n-1}) = Q(M_n)$ avec $Q = P(X^{n-1})$, ce qui nous donne la stabilité par transposition.

$$\boxed{\text{Les matrices circulantes constituent un sous-espace de } \mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) \text{ stable par produit et transposition.}}$$

Q 20. Puisque $M_nX_k = \omega_n^k X_k$, on a $M_n^2 X_k = \omega_n^{2k}X_k$, puis $M_n^r X_k = \omega_n^{rk}X_k$ et enfin (pour $P \in \mathbb{C}[X]$) :

$$P(M_n)X_k = P(\omega_n^k)X_k$$

La famille $(X_0, ..., X_{n-1})$ est donc une base de vecteurs propres pour la matrice circulante $P(M_n)$, associée aux valeurs propres $\left(P(\omega_n^k)\right)_{0\leq k\leq n-1}$.

$$\boxed{\text{Toute matrice circulante est diagonalisable.}}$$

L'auteur a oublié de demander la valeur du déterminant d'une matrice circulante...